

§ 2.2 初等单值解析函数

一、有理分式函数

(1) $P_n(z) = a_0 z^n + \dots + a_{n-1}z + a_n$ 在复平面上解析.

(2) $W = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = \frac{a_0 z^n + \dots + a_n}{b_0 z^m + \dots + b_m}$ 在 $Q_m(z) \neq 0$ 的点外解析.

特别地, $(c^0)' = 0$

二、指数函数的定义与性质

1. 定义

Def. $e^z \stackrel{z=x+iy}{=} e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y.$

$$|e^z| = e^x, \arg e^z = y$$

2. 定义域: 复平面

3. 性质

(1) $(e^z)' = e^z$, $w = e^z$ 在全平面上解析

(2) 周期性: $e^{z+2k\pi i} = e^z$

$$(3) \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

$$e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$$

(4) $w = e^z$ 无界, $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z$ 不存在 (e^∞ 无意义)

(5) 当 $z = x$ 时 e^x 是实变量指数函数

三、三角函数的定义与性质

1. 定义

$$\text{Def.} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\tan z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}, \quad \cot z = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

2. 性质

(1) $\sin z, \cos z$ 在全平面上解析, 且:

$$(\sin z)' = \cos z, (\cos z)' = -\sin z, (\tan z)' = \frac{1}{\cos^2 z}, (\cot z)' = \frac{-1}{\sin^2 z}$$

(2) 函数的零点:

$$\sin(k\pi) = 0, \cos(k\pi + \frac{\pi}{2}) = 0, \tan(k\pi) = 0, \cot(k\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$$

$\cot z$ 与 $\tan z$ 都在分母不为零的点上定义且解析.

$$(3) \sin(z + 2k\pi) = \sin z, \cos(z + 2k\pi) = \cos z$$

$$\tan(z + k\pi) = \tan z, \cot(z + k\pi) = \cot z$$

(4) $\sin z, \cos z$ 均无界。

(5) 恒等式均成立 (如 $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$)

*四、双曲函数

$$\text{双曲正弦: } \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\text{余弦: } \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\text{正切: } \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$$

$$\text{余切: } \operatorname{cth} z = \frac{1}{\operatorname{th} z}$$